

В. В. Стружанов, Г. Л. Крахмальник**ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
В ТЕОРИИ НЕУПРУГОГО ИЗГИБА****1. Введение**

В механике материалов особое место занимает проблема экспериментального определения свойств материалов на всех стадиях деформирования, включая и закритическую стадию. Трудность заключается в том, что в некоторый момент нагружения деформирование испытуемого образца теряет устойчивость, а именно либо существенно изменяется геометрия образца и соответственно нарушается однородность напряженно-деформированного состояния, которая является необходимым условием при определении свойств, либо происходит динамическое разрушение после выхода на закритическую стадию. Одним из возможных путей решения данной проблемы является проведение испытаний специальных конструктивных элементов с последующим пересчетом данных эксперимента на свойства материала. Конструктивный элемент и схема нагружения выбираются таким образом, чтобы в некоторой области элемент материала проходил все стадии деформирования и при этом сохранялась устойчивость самого элемента конструкции. Задачи определения количественных характеристик по результатам измерений их косвенных проявлений представляют собой обратные задачи, часто возникающие в физике, технике и других отраслях знаний. Как правило, они относятся к классу некорректных задач [1, 2].

В данной работе рассматривается конструктивный элемент в виде балки прямоугольного сечения и решается обратная задача определения свойств материала по результатам, полученным при чистом изгибе этой балки.

2. Уравнение чистого изгиба

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения высотой l и шириной d . К балке приложен изгибающий момент M таким образом, что в ней реализуется состояние чистого изгиба. В этом случае единственной компонентой тензора напряжений, отличной от нуля, является продольное напряжение $\sigma_x = \sigma$, а продольная деформация $\varepsilon_x = \varepsilon$ линейно распределена по высоте

балки (рис. 1). Полагаем, что зависимость напряжений от деформаций $\sigma(\varepsilon)$ при растяжении после достижения предела текучести σ^t становится нелинейной или кусочно-линейной с касательным модулем $E^p < E$ (E — модуль упругости), а при сжатии всегда линейна с модулем E , т. е. предел текучести материала при сжатии намного превышает предел текучести при растяжении. В этом случае нейтральная линия, где напряжения и деформации равны нулю, изменяет свое положение в зависимости от кривизны балки κ . Тогда $\varepsilon = \kappa \cdot a(\kappa)$, $\rho = -\kappa \cdot b(\kappa)$, $b = l - a$. Здесь ε , ρ , a , b — соответственно деформации наиболее растянутых и сжатых волокон и расстояния от них до нейтральной оси балки (рис. 1).

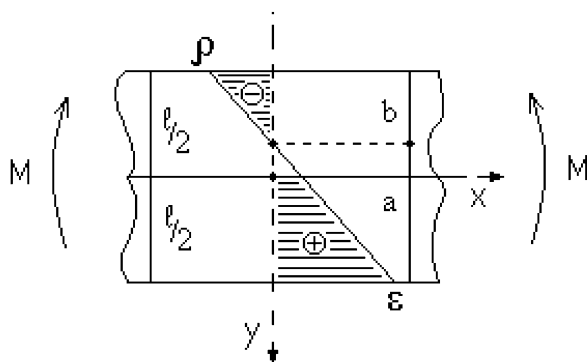


Рис.1

Уравнение чистого изгиба, связывающее изгибающий момент с кривизной балки, имеет вид [3]

$$\frac{d}{\kappa^2} \int_{-\kappa b}^{\kappa a} \sigma(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = M(\kappa).$$

Преобразуя интеграл в данном выражении с учетом линейности функции $\sigma(\varepsilon)$ при сжатии ($\sigma = E\varepsilon$), получаем

$$\int_0^{m(\kappa)} K(\kappa, \varepsilon) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = F(\kappa), \quad (1)$$

где $m(\kappa) = \kappa \cdot a(\kappa) = \varepsilon$; $K(\kappa, \varepsilon) = K_1(\kappa) \cdot K_2(\varepsilon)$; $K_1(\kappa) = \kappa^2 b^{-3}$; $K_2(\varepsilon) = \varepsilon$; $F(\kappa) = M(\kappa) d^{-1} b^{-3} - 3^{-1} E \kappa$. Если известна зависимость $\sigma(\varepsilon)$, то, задавая постепенно возрастающие значения κ , после предварительного вычисления величины $a(\kappa)$ находим по формуле (1) зависимость $M(\kappa)$ (прямая задача). Отметим, что максимальные положительная и отрицательная деформации

определяются из уравнения равновесия

$$\int_{-\rho}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_{-\rho}^0 E\varepsilon d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = 0,$$

где $\varepsilon - \rho = l \cdot \kappa$, и затем находится зависимость $a = \varepsilon/\kappa$ [3]. Когда же по известным функциям $M(\kappa)$, $a(\kappa)$, заданным на отрезке $[0, \kappa_z]$, необходимо найти функцию $\sigma(\varepsilon)$ (обратная задача), то уравнение (1) представляет собой неклассическое интегральное уравнение Вольтерра первого рода и обратная задача является некорректной [4].

3. Сеточный аналог уравнения изгиба

Для того чтобы решить обратную задачу, перейдем от уравнения (1) к системе линейных алгебраических уравнений. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\int_0^{m(\kappa)} \varepsilon \cdot \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = f(\kappa), \quad (2)$$

где $f(\kappa) = F(\kappa)K_1^{-1}(\kappa)$. Введем на $[0, \kappa_z]$ сетку узлов $\kappa_i = ih$, $i = \overline{1, n}$, $nh = \kappa_z$ и представим уравнение (2) в виде системы уравнений

$$\sum_{i=1}^j \int_{m_{i-1}}^{m_i} \varepsilon \cdot \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = f_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда находим, что

$$\int_{m_{i-1}}^{m_i} \varepsilon \cdot \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = f_i - f_{i-1}. \quad (3)$$

Здесь $m_i = m(\kappa_i) = \kappa_i \cdot a(\kappa_i) = \varepsilon_i$, $f_i = f(\kappa_i)$, $m_0 = 0$, $f_0 = 0$. Аппроксимируя теперь функцию $\sigma(\varepsilon)$ на отрезках $[\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i]$ линейной функцией $\sigma = \sigma_{i-1} + \alpha_{i-1}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$, где $\sigma_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, получаем из (3) после интегрирования и некоторых преобразований треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\alpha_{i-1}}{6}(2m_i^3 - 3m_{i-1}m_i^2 + m_{i-1}^3) + \frac{1}{2}(m_i^2 - m_{i-1}^2) \sum_{j=0}^{i-2} \alpha_j(m_{j+1} - m_j) = f_i - f_{i-1}. \quad (4)$$

Очевидно, что система (4) однозначно разрешима при любой правой части. После определения коэффициентов α_i , напряжения на концах отрезков вычисляются, исходя из вида линейной аппроксимации.

4. Точные исходные данные

Рассмотрим множество X , состоящее из всевозможных заданных на отрезке $[0, \varepsilon_z]$, где $\varepsilon_z = \varkappa_z \cdot a(\varkappa_z)$, непрерывных функций $\sigma(\varepsilon)$ таких, что $\sigma(0) = 0$. Образ этого множества при отображении, осуществляемом оператором Вольтерра (1), определяет множество Y , элементами которого являются пары функций $\{M, a\}$. Считаем, что задача имеет точные данные, если они определены парой функций $\{M_T, a_T\} \in Y$.

Возьмем для балки с высотой $l = 2$ мм и шириной $d = 1$ мм функцию $\sigma_T \in X$, заданную выражениями (рис. 2, кривая 1)

$$\sigma_T = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t; \\ 60 + E_1^p(\varepsilon - \varepsilon_t), & \varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ 90 + E_2^p(\varepsilon - \varepsilon_B), & \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon_z, \end{cases}$$

где $E = 2 \cdot 10^4$ кГ/мм²; $E_1^p = 10^4$ кГ/мм²; $E_2^p = -3 \cdot 10^4$ кГ/мм²; $\varepsilon_t = 0,003$; $\varepsilon_B = 0,006$; $\varepsilon_z = 0,009$. Решая теперь прямую задачу, находим аналитические зависимости для $M_T(\varkappa)$ и $a_T(\varkappa)$, а именно

$$a_T = \begin{cases} 0.5l, & 0 \leq \varkappa \leq \varkappa_t; \\ l(1 - C_1)^{-1} + \varepsilon_t \varkappa^{-1} - \\ \quad - [\varkappa(1 - C_1)]^{-1} [2l\varepsilon_t \varkappa(1 - C_1) + l^2 \varkappa^2 C_1]^{\frac{1}{2}}, & \varkappa_t \leq \varkappa \leq \varkappa_B; \\ A - \sqrt{A^2 - B}, & \varkappa_B \leq \varkappa \leq \varkappa_z; \end{cases}$$

$$M_T = \begin{cases} 12^{-1} l^3 d E \varkappa, & 0 \leq \varkappa \leq \varkappa_t; \\ \varkappa^{-2} d [K + D(a_T^2 \varkappa^2 - \varepsilon_t^2) + 3^{-1} E_1^p (a_T^3 \varkappa^3 - \varepsilon_t^3)], & \varkappa_t \leq \varkappa \leq \varkappa_B; \\ \varkappa^{-2} d \{ K + D(\varepsilon_B^2 - \varepsilon_t^2) + 3^{-1} E_1^p (\varepsilon_B^3 - \varepsilon_t^3) + \\ \quad + 0,5 [E\varepsilon_t + E_1^p (\varepsilon_B - \varepsilon_t) - E_2^p \varepsilon_B] (a_T^2 \varkappa^2 - \varepsilon_B^2) + \\ \quad + 3^{-1} E_2^p (a_T^3 \varkappa^3 - \varepsilon_B^3), & \varkappa_B \leq \varkappa \leq \varkappa_z. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= [\varkappa(1 - C_2)]^{-1} [l\varkappa + \varepsilon_t(1 - C_1) + \varepsilon_B(C_1 - C_2)], \\ B &= [\varkappa^2(1 - C_2)]^{-1} [l^2 \varkappa^2 + \varepsilon_t^2(1 - C_1) + \varepsilon_B^2(C_1 - C_2)], \\ K &= 3^{-1} E [(l - a_T)^3 \varkappa^3 + \varepsilon_t^3], \quad D = 0,5\varepsilon_t(E - E_1^p), \\ C_1 &= E_1^p/E, \quad C_2 = E_2^p/E, \\ \varkappa_t &= 0,003, \quad \varkappa_B = 0,005806, \quad \varkappa_z = 0,007854. \end{aligned}$$

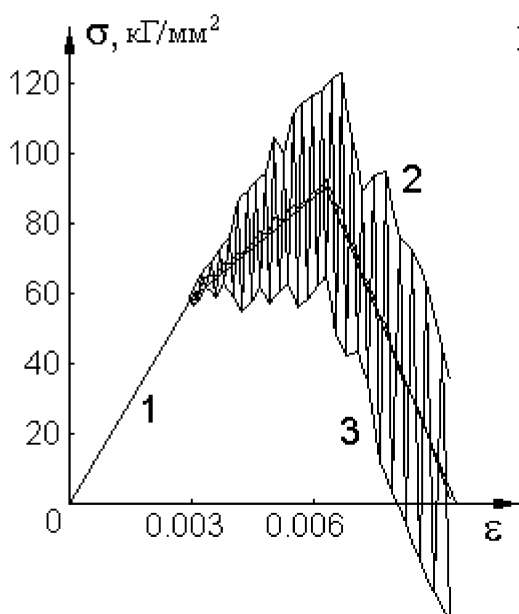


Рис. 2

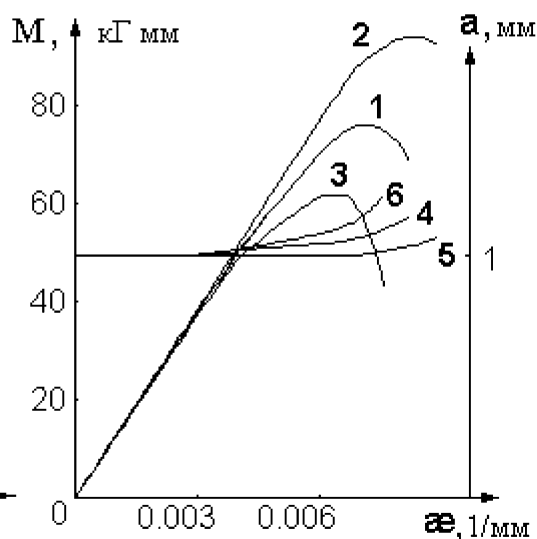


Рис. 3

Данные зависимости изображены на рис. 3 (кривые 1 и 4). Используя эти функции, определяем $f_T(\kappa)$ и $m_T(\kappa)$. Затем, задавая шаг разбиения h , находим величины f_{iT} , m_{iT} , решаем систему (4) и вычисляем значения σ_i , ε_i . Проведенные расчеты показали, что при любом шаге разбиения точки с координатами σ_i , ε_i точно ложатся на кривую $\sigma_T(\varepsilon)$.

5. Случай приближенных исходных данных

Значения функций $M(\kappa)$, $a(\kappa)$ определяются путем измерений в экспериментах на чистый изгиб и потому известны приближенно. Пусть M_Δ , a_Δ — такие приближенные функции. В этом случае речь может идти лишь о нахождении приближенного к σ_T решения уравнения (1). При этом пара $\{M_\Delta, a_\Delta\}$, вообще говоря, не принадлежит множеству Y и приближенное решение уравнения (1) при $f = f_\Delta$, $m = m_\Delta$ может не существовать. Даже если такое решение существует, оно не обладает свойством устойчивости, ибо обратный оператор Вольтерра первого рода не является непрерывным (не выполняется условие корректности по Адамару). Моделируя данную ситуацию, оставим в значениях f_{iT} , m_{iT} только два знака после запятой. Для полученных таким образом приближенных данных $f_{i\Delta}$, $m_{i\Delta}$ решим обратную задачу, используя систему (4). В результате расчетов при $h = 0,0001$ получаем характерную пилообразную функцию, изображенную на рис. 2.

Осуществим построение приближенного решения, применяя следующий алгоритм подбора. Пусть до точки C приближенная диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ известна и из этой точки выходит ломаная $CNQK$ (рис. 4). Разбиваем отрезок NQ точками c_j (j — достаточно большое число) и решаем прямую задачу для диаграмм $CNQc_j$. Из полученного множества значений M_j, a_j находим значения M_*, a_* , удовлетворяющие неравенствам (5). Таким образом определяется точка c_* такая, что прямой расчет с использованием диаграммы OLC_{c_*} дает кривые, достаточно близко расположенные к кривым M_Δ, a_Δ . Далее процесс повторяем с тем изменением, что вместо точки C берем уже точку c_* . Реализуя данный алгоритм при $\delta = 0, 1$, получаем диаграмму $\sigma_*(\varepsilon)$, которая практически не отличается от диаграммы $\sigma_T(\varepsilon)$ (рис. 3, кривая 1).

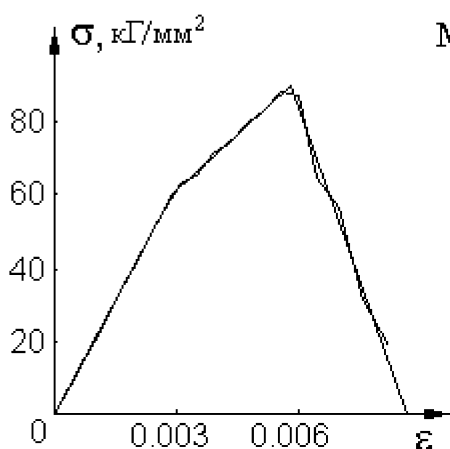


Рис.5

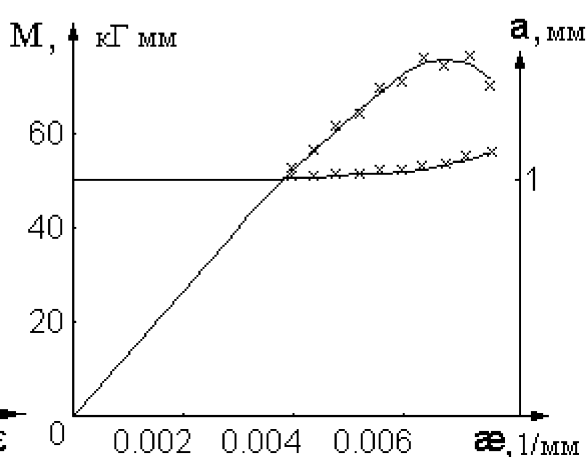


Рис.6

6. Саморегуляризация

В теории уравнений Вольтерра первого рода хорошо известен стабилизирующий эффект процедуры дискретизации, который получил название саморегуляризирующего [4]. Он основан на том факте, что задача восстановления приближенного дискретизированного решения уравнения Вольтерра первого рода устойчива к возмущениям правой части и, следовательно, существует такой шаг разбиения h , при котором получается достаточно хорошее приближение к искомому решению [4]. В данной задаче для иллюстрации этого эффекта выбор подходящего шага разбиения осуществляли перебором различных значений h из интервала $0,0001 \leq h \leq 0,001$ на сетке с шагом $\delta h = 10^{-4}$.

В результате наиболее приемлемое решение обратной задачи неупругого изгиба было получено при $h = 0,0004$ (рис. 5). На рис. 6 приведен результат расчета прямой задачи с использованием данного решения, и можно отметить незначительное отклонение от точных значений M_T , \varkappa_T .

В заключение отметим, что метод подбора требует определенного навыка как трудно формализуемый метод. Саморегуляризация, вообще говоря, свободна от этого недостатка [4], и при решении обратных задач механики материалов желательно пользоваться методом саморегуляризации, создавая соответствующие алгоритмы определения оптимального шага разбиения.

Авторы выражают благодарность профессору В. В. Васину за внимание и ценные замечания по работе.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976.
4. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.

Статья поступила 13.06.2001 г.
Окончательный вариант 19.12.2001 г.